センター 数IIB 60%

数学2B ベクトル編

第1問

平面上に一辺の長さが1である正三角形OPQがある。直線OQに関してPと対称な点をRとし，直線OPに関してQと対称な点をSとする。PSを $a:(1-a)$ $(0<a<1)$ に内分する点をA，ORを $b:(1-b)$ $(0<b<1)$ に内分する点をBとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$ とおく。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{p}-\boxed{ア}\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\boxed{イ}\vec{p}+\boxed{ウ}\vec{q}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\boxed{エ}\vec{p}+\left(\boxed{オ}+\boxed{カ}\right)\vec{q}$，

$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\boxed{キ}\vec{p}+\left(\boxed{ク}-\boxed{ケ}\right)\vec{q}$ となる。ただし，$\boxed{オ}$ と $\boxed{カ}$ は解答の順序を問わない。これより，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{1}{\boxed{コ}}\left(\boxed{サ}a-\boxed{シ}b-ab\right)$ である。

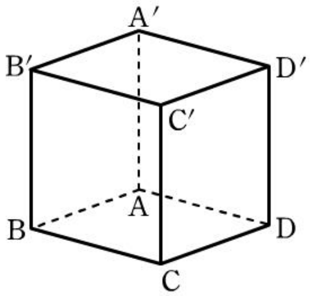
(2)　2直線ARとBQが垂直に交わるとする。このとき，b は a を用いて

$b=\dfrac{\boxed{ス}a}{a+\boxed{セ}}$ と表される。

さらに $a=\dfrac{1}{2}$ とすると $\left|\overrightarrow{\mathrm{AR}}\right|=\dfrac{\sqrt{\boxed{ソタ}}}{\boxed{チ}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right|=\dfrac{\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}$ であり，四角形ABRQの面積は $\dfrac{\boxed{ナニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネノ}}$ である。

第2問

一辺の長さが1の，図のような立方体 $\mathrm{ABCD-A'B'C'D'}$ において，AB，CC′，D′A′ を $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{y}$，$\overrightarrow{\mathrm{AA'}}=\vec{z}$ とおく。ただし，$0<a<1$ とする。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}})\vec{x}+\vec{y}+\boxed{\text{ウ}}\,\vec{z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\boxed{\text{エオ}}\,\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}$$

となる。したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|:|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=1:\boxed{\text{カ}}$，

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\boxed{\text{キ}}(a^2-a+\boxed{\text{ク}})$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=a^2-a+\boxed{\text{ケ}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ のなす角は $\boxed{\text{コサ}}^\circ$ である。

(2) 三角形 PQR の重心を G とすると $\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\dfrac{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})$ である。

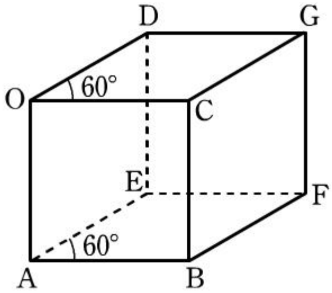
いま，辺 C′D′ 上に SQ＝SR となるように点 S をとる。このとき，

$\overrightarrow{\mathrm{C'S}}=\boxed{\text{ソ}}\,\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{SD}}=(\boxed{\text{タ}}-\boxed{\text{チ}})\vec{x}-\vec{z}$ である。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{SG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ が垂直であるとき，a の値は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ であり，$\angle\mathrm{QSR}=\boxed{\text{トナニ}}^\circ$ となる。

第3問

右の図のように向かい合う面が平行である六面体 OABC−DEFG がある。ただし，面 OABC，CBFG は一辺の長さが 1 の正方形であり，面 OCGD は $\angle\mathrm{COD}=60^\circ$ のひし形である。



このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{ア}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{\boxed{\text{イ}}}$$ である。

a を $0<a<1$ を満たす数とする。線分 EB を 2 : 1 に内分する点を P，線分 GE を $a:(1-a)$ に内分する点を Q とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(a-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{1}{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$ である。

第4問

四面体 OABC において，辺 OA の中点を P，辺 BC の中点を Q，辺 OB の中点を S，
辺 CAの中点を T，辺 OC の中点を V，辺 AB の中点を W とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ST}}=-\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\mathrm{AB}^2+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\mathrm{OC}^2$ である。

第5問

四面体の四つの頂点を，O，L，M，N とする。線分 OL を 2 : 1 に内分する点を P とし，線分 MN の中点を Q とする。a と b を 1 より小さい正の実数とする。線分 ON を $a:(1-a)$ に内分する点を R とし，線分 LM を $b:(1-b)$ に内分する点を S とする。

$\vec{l}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\vec{m}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\right)\vec{l}+\boxed{\text{ウ}}\,\vec{m}-\boxed{\text{エ}}\,\vec{n}$

$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{l}-\boxed{\text{キ}}\,\vec{n}$，　$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{m}+\left(\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}-\boxed{\text{シ}}\right)\vec{n}$

第6問

四面体OABCにおいて，辺OAを1 : 2に内分する点をD，辺ABを2 : 1に内分する点をEとする。また，辺OCの中点をFとする。

(1)　$0<a<1$として，線分EFを$a:(1-a)$に内分する点をGとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\left(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

(2)　3点O，B，Cで定まる平面OBCと直線DGの交点を求めよう。点Pが直線DG上にあるとき，実数tを用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{DG}}\\&=\frac{1-\boxed{\text{ク}}\,t}{\boxed{\text{ケ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\right)t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

と表せる。したがって，$t=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\left(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots\cdots ①$$

であり，このとき，点Pは平面OBC上にある。したがって，①を満たす点Pが平面OBCと直線DGの交点である。

(3)　(2)で求めた交点Pが辺BC上にあるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときである。

第7問

四面体OPQRにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とおく。

(1)　$0<a<1$ として，線分OP，QRを $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれS，Tとすると $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\boxed{\text{ア}}\,\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\left(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\right)\vec{q}+\boxed{\text{エ}}\,\vec{r}$ である。

線分OQ，PRの中点をそれぞれU，Wとし，線分UWを $a:(1-a)$ に内分する点をMとすれば $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}\left\{\boxed{\text{カ}}\,\vec{p}+\left(\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\right)\vec{q}+\boxed{\text{ケ}}\,\vec{r}\right\}$ である。

よって，Mは線分ST上にあり $\mathrm{SM}:\mathrm{ST}=1:\boxed{\text{コ}}$ である。

直線OMが三角形PQRと交わる点をNとする。

このとき $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ である。

さらに，点Nが三角形PQRの重心Gと一致しているとする。このとき $a=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$

(2)　次に，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OR}=1$，$\angle\mathrm{POR}=90^\circ$ で，点Oと三角形PQRの重心Gを通る直線OGが三角形PQRに垂直であるとき，∠POQの大きさと線分OGの長さを求めよう。

直線OGが三角形PQRに垂直であるための条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ であるから $\vec{q}\cdot\vec{r}=\boxed{\text{タ}}$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\boxed{\text{チツ}}$ である。よって $\angle\mathrm{POQ}=\boxed{\text{テトナ}}^\circ$，$\mathrm{OG}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

第8問

a は $0<a<1$ を満たす数とする。辺 AB，AC の長さが等しい二等辺三角形 ABC に対し，辺 AB を 1 : 5 に内分する点を P，辺 AC を $a:(1-a)$ に内分する点を Q とする。また，線分 BQ と線分 CP の交点を K とし，直線 AK と辺 BC の交点を R とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表すと，それぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{ア}}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}},\qquad \overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{1}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}-a}{\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}\,a+\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}\,a+\boxed{\text{チ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である。

第9問

正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。辺 OA を 4 : 3 に内分する点を P，辺 BC を 5 : 3 に内分する点を Q とする。

そのとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{c}$ である。

線分 PQ の中点を R とし，直線 AR が △OBC の定める平面と交わる点を S とする。

そのとき，AR : AS＝$\boxed{\text{ク}}$: $\boxed{\text{ケ}}$ である。また，$\cos\angle\mathrm{AOQ}=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

点Oを原点とする座標空間に4点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1), D(−2, −1, −2) がある。$0<a<1$ とし，線分ABを $a:(1-a)$ に内分する点をE，線分CDを $a:(1-a)$ に内分する点をFとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は a を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\left(\boxed{\text{アイ}}\,a,\ \boxed{\text{ウエ}}\,a,\ \boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}\,a\right)$ と表される。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のときである。

(2) $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ とする。$0<b<1$ として，線分EFを $b:(1-b)$ に内分する点をGとすると，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は b を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\dfrac{\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コ}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$

(3) (2)において，直線OGと直線BCが交わるときの b の値と，その交点Hの座標を求めよう。

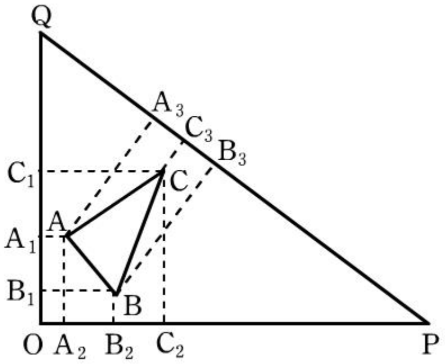
点Hは直線BC上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表される。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と表される。よって

$$b=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\quad s=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}},\quad t=\boxed{\text{テ}}\qquad \mathrm{H}\left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \boxed{\text{ネ}}\right)$$

また，点Hは線分BCを $\boxed{\text{ノ}}:1$ に外分する。

第11問

座標平面上の3点 O$(0,\ 0)$，P$(4,\ 0)$，Q$(0,\ 3)$ を頂点とする三角形 OPQ の内部に三角形 ABC があるとする。A，B，C から直線 OQ に引いた垂線とOQ との交点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{C_1}$ とする。A，B，C から直線 OP に引いた垂線と OP との交点をそれぞれ $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$ とする。A，B，C から直線 PQ に引いた垂線と PQ との交点をそれぞれ $\mathrm{A_3}$，$\mathrm{B_3}$，$\mathrm{C_3}$ とする。



$\mathrm{A_1}$ が線分 $\mathrm{B_1C_1}$ の中点であり，$\mathrm{B_2}$ が線分 $\mathrm{A_2C_2}$ の中点であり，$\mathrm{C_3}$ が線分 $\mathrm{A_3B_3}$ の中点であるとする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(z,\ w)$ とおく。$\mathrm{A_1}$ が線分 $\mathrm{B_1C_1}$ の中点であるから $w=\boxed{\text{ア}}\,y$ である。$\mathrm{B_2}$ が線分 $\mathrm{A_2C_2}$ の中点であるから $z=\boxed{\text{イ}}\,x$ である。

線分 AB の中点を D とすると，$\mathrm{C_3}$ が線分 $\mathrm{A_3B_3}$ の中点であるから $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\boxed{\text{ケ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ であるから $y=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}x$ である。

第12問

紙片の上に図1のようなひし形 $ABCD_0$ があり，$AB=AC=2$ とする。また，線分 AC の中点を O とする。この紙片を，図2のように空間の中で，AC に沿って 60° だけ折り曲げ，点 D_0 の新しい位置を D とする。

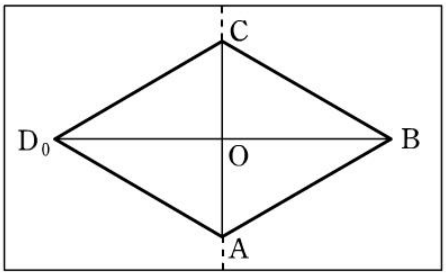


図1

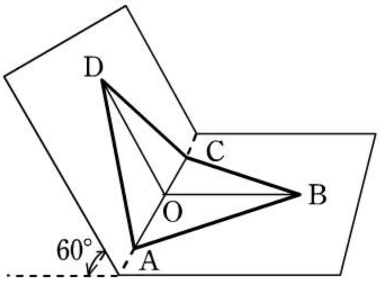


図2

(1)　このとき，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ についての内積を求めると

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\boxed{\text{ア}},\quad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\boxed{\text{イ}},\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$ となる。

(2)　a を $0<a<1$ を満たす数とし，線分 BD を $a:(1-a)$ の比に内分する点 P をとる。

このとき　$\overrightarrow{OP}=(\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}})\overrightarrow{OB}+\boxed{\text{ク}}\,\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{PA}=(\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コ}})\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\boxed{\text{サ}}\,\overrightarrow{OD}$

数学苦手でも合格したいならやるしかない！俺の解き方見てとにかく

まず数学２Ｂ６割狙うで！

第13問

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OC}=\mathrm{CA}=\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ である。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\boxed{\text{ア}}$ であり，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

　また，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　直線 AB 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=0$ であるようにとると $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b}-\vec{c}$

　となり，点 P は線分 AB を $1:\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ に内分する。また，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ス}}$ であり，

　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は三角形 $\boxed{\text{チ}}$ の各辺と垂直であるから，直線 CP は三角形 $\boxed{\text{チ}}$ を含む平面に垂直である。ただし，$\boxed{\text{チ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

　⓪　ABC　　①　OBC　　②　OAC　　③　OAB

数学苦手でも合格したいならやるしかない！俺の解き方見てとにかく

まず数学2B6割狙うで！

第14問

平面上の三つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|=1$$

を満たし，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ に垂直で，$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$ であるとする。

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\boxed{\text{オカ}}^\circ$ である。

(2)　ベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと $\vec{c}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\vec{a}+\boxed{\text{ケ}}\,\vec{b}\right)$ である。

第15問

四面体 OABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=3$，$\angle\mathrm{OCA}=\angle\mathrm{OCB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ とする。

(1)　次の内積を求めると

$$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\boxed{\text{ア}},\qquad \overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{\text{イウ}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\boxed{\text{エ}}$$ となる。

また $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(2)　辺 AB の中点を M とすると $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\boxed{\text{ク}}$ である。

さらに，線分 CM 上に点 P をとり，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ $(0<t<1)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ が直交するのは $t=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ のときである。

第16問

平面上の 3 点 O，A，B が $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=1$ を満たしているとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である。したがって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ となる。

(2)　三角形 OAB の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，O から辺 AB に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

第17問

一辺の長さが2の正三角形ABCの3辺AB，BC，CAの中点をそれぞれD，E，Fとする。$0<a<1$として，線分ADを$(1-a):a$に内分する点をO，線分CEを$a:(1-a)$に内分する点をPとし，直線OPと直線EFの交点をQ，直線OPと直線DFの交点をRとする。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{y}$とおく。

(1)　ベクトル$\vec{x}$，$\vec{y}$は$|\vec{x}|=|\vec{y}|=\boxed{\text{ア}}$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$を満たす。

(2)　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\boxed{\text{エオ}}-\boxed{\text{カ}}\right)\vec{x}+\left(\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\right)\vec{y}$$

と表される。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の大きさの2乗は

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\boxed{\text{ケ}}\left(a^{\boxed{\text{コ}}}-\boxed{\text{サ}}+\boxed{\text{シ}}\right)$$

である。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$で表せば

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}-\boxed{\text{ソ}}}\overrightarrow{\mathrm{OP}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}+\boxed{\text{ツ}}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

である。$\left(\boxed{\text{チ}}\right.$と$\boxed{\text{ツ}}$は解答の順序を問わない。$\left.\right)$

数学苦手でも合格したいならやるしかない！俺の解き方見てとにかく

まず数学2B6割狙うで！

第18問

三角形 ABC の 3 辺の長さがそれぞれ $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=6$ であるとする。点 P は $a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+6\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たすとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{y}$ とおく。

(1)　直線 AP と直線 BC の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{x}$ と $\vec{y}$ を用いて表すと，それぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}\vec{x}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{x}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{y}$$

となる。$\left(\boxed{\text{イ}}\right.$ と $\boxed{\text{ウ}}$ は解答の順序を問わない。$\left.\right)$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよう。(1) より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{x}=\boxed{\text{ク}}+\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{x}\cdot\vec{y}$ である。

また，余弦定理を用いると $\vec{x}\cdot\vec{y}=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}-a^2}{\boxed{\text{サ}}}$ であるから，求める内積は

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{x}=\dfrac{\boxed{\text{シス}}-a^2}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

第19問

(1)　平面内に点 O と三角形 ABC がある。点 P は $-7\overrightarrow{\mathrm{PA}}+13\overrightarrow{\mathrm{PB}}+11\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たすものとする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$x+y+z=1$ を満たす x，y，z はそれぞれ $x=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$，$y=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$，$z=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

第20問

平面上に三角形 ABC があり，点 Q を $5\overrightarrow{QA}+6\overrightarrow{QB}+8\overrightarrow{QC}=\vec{0}$ を満たすようにとる。直線 AQ と直線 BC の交点を M とすると $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{AC}$ と表される。

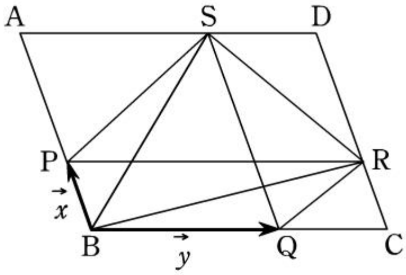
三角形 ABM と三角形 AMC の面積の比は $\triangle ABM:\triangle AMC=\boxed{オ}:\boxed{カ}$ で与えられる。

直線 AM が角 A の二等分線になるのは $AB:AC=\boxed{キ}:\boxed{ク}$ のときである。

数学苦手でも合格したいならやるしかない！俺の解き方見てとにかく

まず数学2B6割狙うで！

第21問



平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $a:1$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1$ に内分する点を Q とする。辺 CD 上の点 R および辺 DA 上の点 S をそれぞれ PR∥BC，SQ∥AB となるようにとり，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}$，$\vec{y}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ とおく。

(1)　五角形 PBQRS の辺 RQ，SP および対角線 SB，RB が表すベクトルは，$\vec{x}$，$\vec{y}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-\vec{x}-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{y},\qquad \overrightarrow{\mathrm{SP}}=\boxed{\text{ウエ}}\,\vec{x}-\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SB}}=-\left(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\right)\vec{x}-\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RB}}=-\vec{x}-\left(\boxed{\text{キ}}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)\vec{y}$$

となる。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ が成り立つとする。

このとき，$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}|\vec{x}|^2=-\dfrac{1}{\boxed{\text{シス}}}|\vec{y}|^2$ である。

第22問

各辺の長さが1である正四面体OABCにおいて，線分ABの中点をP，線分OBを2 : 1に内分する点をQ，線分OCを1 : 3に内分する点をRとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

(1)　次の内積を計算すると $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}\vec{a}-\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\vec{c}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タチ}}$ であり，さらに $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\dfrac{\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|=\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ を得る。

したがって，$\angle\mathrm{QPR}=\theta$ とするとき $\cos\theta=\dfrac{\boxed{ニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネノ}}$ となる。

end